VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MINIMALIZACE BOOLEOVÝCH FUNKCÍ POMOCÍ QUINEOVY-MCCLUSKEYOVY METODY

MINIMALIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS BY MEANS OF QUINE-MCCLUSKEY'S METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — PAVEL NIEDOBA
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — prof. RNDr. LADISLAV SKULA, DrSc.
SUPERVISOR

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Pavel Niedoba

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Minimalizace Booleových funkcí pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody

v anglickém jazyce:

Minimalization of Boolean functions by means of Quine-McCluskey's method

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hlavním cílem práce je ovládnutí a popis Quineovy-McCluskeyovy metody pro minimalizaci Booleovy funkce. Předpokládá se, že autor pomocí této metody bude schopen pro Booleovy funkce zadané v dvojkovém zápisu standartního součtového tvaru minimalizovat logický obvod vyjadřující tuto funkci vzhledem k počtu jeho členů. K tomuto cíli budou prezentovány základy algebry Booleových funkcí.

Cíle bakalářské práce:

Závěrečným cílem je vypracování programu pro minimalizaci Booleových funkcí pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody, jeho vyzkoušení a použití na různé příklady. Pomocným cílem je zvládnutí převodu obecného vyjádření Booleovy funkce na dvojkový zápis standartního součtového tvaru.

Seznam odborné literatury:

[1]J.Šlapal, Metody diskrétní matematiky, skripta FSI VUT, Brno, 2004.
[2]G.E.Hoernes,M.F.Heilweil,Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů,SNTL,Praha,1969,překlad z angličtiny.
[3]R.Johnsonbaugh,Discrete Mathematics,New York,1984.
[4]S.V.Jablonskij,Úvod do diskrétnej matematiky,Alfa,Bratislava, 1984.

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ladislav Skula, DrSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2009/2010.

V Brně, dne 7.10.2009

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.	doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Ředitel ústavu	Děkan fakulty

ABSTRAKT

Práce se zabývá minimalizací Booleových funkcí pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody s aplikací metody mřížky prostých implikantů z důvodu dosažení minimálního tvaru funkce a minimalizací pomocí ekvivalence. Dále práce obsahuje programovou implementaci zmíněných minimalizačních metod.

KLÍČOVÁ SLOVA

Quineova-McCluskeyova metoda, minimalizace, Booleova algebra, Booleovy funkce

SUMMARY

This work is concerned with minimalization of Boolean functions by means of Quine-McCluskey´s method with application of the method of prime implicants for obtaining the minimal form of the function and with minimalization using an equivalence. Another part of the work is an application implementing these minimalization methods.

KEYWORDS

Quine-McCluskey´s method, minimalization, Boolean algebra , Boolean functions

NIEDOBA, P. *Minimalizace Booleových funkcí pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 33 s. Vedoucí bakalářské práce prof. RNDR. Ladislav Skula, DrSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Minimalizace Booleových funkcí pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody* vypracoval samostatně pod vedením prof. RNDr. Ladislava Skuly, DrSc. s využitím pramenů uvedených v seznamu literatury.

Pavel Niedoba

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému školiteli prof. RNDr. Ladislavu Skulovi, DrSc. za vedení, cenné rady a věnovaný čas při zpracování mé bakalářské práce.

Pavel Niedoba

OBSAH

ÚVOD

Problematika minimalizace je v dnešní době nedílnou součástí mnoha oborů inženýrské praxe. S nástupem výpočetní techniky jsme schopni poměrně rychle řešit i rozsáhlejší minimalizační úlohy, z nichž stojí za zmínku mimo jiné i úloha minimalizace logických obvodů za účelem snížení nákladů a zjednodušení obvodu. Logický obvod lze vyjádřit pomocí Booleovy funkce a právě minimalizací těchto funkcí se budeme dále zabývat.

Práce je sestavena ze dvou částí z nichž první (1. a 2. kapitola) je rigorózně matematicky přesná, čerpající především z pramenů [3] a [6]. Druhá (3. a 4. kapitola) je praktičtější věnující se především popisu minimalizačních metod a popisu programu. Tato část čerpá hlavně z pramene [1]. Nyní konkrétně k jednotlivým kapitolám.

V první kapitole se zabýváme vlastnostmi Booleovy algebry a vybraným větám, které nám následně umožní ukázat vztah mezi Booleovým svazem a Booleovou algebrou.

Druhá kapitola je věnována Booleovým funkcím, které jsme v práci zavedli matematicky přesnou rekurzivní definicí. S využitím této definice jsme schopni provést důkaz věty o jednoznačnosti úplného disjunktního normálního tvaru Booleovy funkce.

Na začátku třetí kapitoly uvádíme odvození vzorců pro počty Booleových funkcí a vlastní definici minimalizační metody, která převádí funkci na tzv. minimální tvar z hlediska počtu členů. Poté se zabýváme principy vybraných minimalizačních metod. Konkrétně to je minimalizace pomocí ekvivalence a Quineova-McCluskeyova metoda s aplikací metody mřížky prostých implikantů.

Čtvrtá kapitola popisuje vstupy a výstupy programu Mini-Malizace 1.0. Tento program slouží k minimalizaci Booleových funkcí pomocí výše uvedených minimalizačních metod.

1 BOOLEOVA ALGEBRA

Předpokládáme znalost pojmu *Booleův svaz*, který pro jistotu připomeneme:

Definice 1.1. Uspořádaná množina $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \leq)$ se nazývá *Booleův svaz*, jestliže je distributivní svaz, který je ohraničený s nejmenším prvkem 0, největším prvkem prvkem 1 a který je komplementární. Předpokládá se, že $\mathcal{B}$ má aspoň dva prvky.

V této práci budeme užívat následujících značení:

- operaci suprema budeme značit symbolem „$\vee$“
- operaci infima budeme značit symbolem „$\wedge$“
- komplement prvku $x \in \mathcal{B}$ označíme $\overline{x}$

Pojem *Booleův svaz* souvisí s pojmem *Booleovy algebry*, jejíž definici uvedeme:

Definice 1.2. Nechť $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)$ je *univerzální algebra* s operacemi $+$, $\cdot$, 0, 1, $^-$; kde $+$, $\cdot$ jsou binární operace; operace $^-$ je unární operace; 0, 1 jsou nulární operace (výběr prvku z množiny). Jestliže tyto operace splňují níže uvedené vlastnosti $a) - e)$ a množina $\mathcal{B}$ má aspoň 2 prvky, pak nazýváme $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)$ *Booleova algebra.*

Užijeme-li k označení binární operace symbol $+$, mluvíme o aditivním zápisu operace. Užijeme-li symbol $\cdot$, mluvíme o multiplikativním zápisu operace a obvykle píšeme xy místo $x \cdot y$.

Pro *Booleovy algebry* platí tyto vlastnosti:

$a)$ *asociativita*:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y,\ z \in \mathcal{B} \tag{1.1}$$

$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y,\ z \in \mathcal{B} \tag{1.2}$$

$b)$ *komutativita*:

$$x+y = y+x \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y \in \mathcal{B} \tag{1.3}$$

$$xy = yx \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y \in \mathcal{B} \tag{1.4}$$

$c)$ *distributivita*:

$$x(y+z) = (xy)+(xz) \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y,\ z \in \mathcal{B} \tag{1.5}$$

$$x+(yz) = (x+y)(x+z) \qquad \text{pro } \forall\ x,\ y,\ z \in \mathcal{B} \tag{1.6}$$

d) neutralita:

$$x + 0 = x \qquad \text{pro } \forall\, x \in \mathcal{B} \tag{1.7}$$

$$x \cdot 1 = x \qquad \text{pro } \forall\, x \in \mathcal{B} \tag{1.8}$$

e) komplementarita:

$$x + \overline{x} = 1 \qquad \text{pro } \forall\, x \in \mathcal{B} \tag{1.9}$$

$$x\overline{x} = 0 \qquad \text{pro } \forall\, x \in \mathcal{B} \tag{1.10}$$

Nyní ukážeme, že pro $\forall\, x \in \mathcal{B}$ je komplement $\overline{x}$ určen jednoznačně.

Věta 1.1. Nechť $\mathcal{B}$ je Booleova algebra. Pak $\forall x \in \mathcal{B}$ má právě jeden komplement.

Důkaz. 1) Z komplementarity plyne, že $\forall\, x \in \mathcal{B}$ má aspoň jeden komplement.
2) $\forall\, x \in \mathcal{B}$ má nejvýše jeden komplement: Předpokládejme, že prvek $x \in \mathcal{B}$ má komplementy y_1, $y_2 \in \mathcal{B}$. Pak platí dle vlastností (1.9), (1.10) následující vztahy: $x + y_1 = 1$, $x + y_2 = 1$, $xy_1 = 0$ a $xy_2 = 0$. Postupným užitím předpokladů a vlastností (1.4), (1.5), (1.7), (1.8) dostáváme $y_1 = y_1 \cdot 1 = y_1(x + y_2) = y_1x + y_1y_2 = = xy_1 + y_1y_2 = 0 + y_1y_2 = y_1y_2$. Obdobně dostáváme $y_2 = y_2 \cdot 1 = y_2(x + y_1) = = y_2x + y_2y_1 = xy_2 + y_1y_2 = 0 + y_1y_2 = y_1y_2$. Odtud $y_1 = y_2$. □

Věta 1.2. Nechť $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)$ je Booleova algebra. Pak pro libovolný prvek $x \in \mathcal{B}$ platí:

$$x + x = x \tag{1.11}$$

$$xx = x \tag{1.12}$$

$$x + 1 = 1 \tag{1.13}$$

$$x \cdot 0 = 0 \tag{1.14}$$

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{1.15}$$

Důkaz. (1.11) Plyne postupně z vlastností (1.8), (1.9), (1.6), (1.10) takto
$x + x = (x + x) \cdot 1 = (x + x)(x + \overline{x}) = x + x\overline{x} = x.$
(1.12) Plyne postupně z vlastností (1.7), (1.10), (1.5), (1.9) takto
$xx = xx + 0 = xx + x\overline{x} = x(x + \overline{x}) = x \cdot 1 = x.$
(1.13) Plyne postupně z vlastností (1.8), (1.9), (1.6), (1.4), (1.8), (1.9) takto
$x + 1 = (x + 1) \cdot 1 = (x + 1)(x + \overline{x}) = x + 1 \cdot \overline{x} = x + \overline{x} \cdot 1 = x + \overline{x} = 1.$
(1.14) Plyne postupně z vlastností (1.7), (1.10), (1.5), (1.3), (1.7), (1.10) takto
$x \cdot 0 = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 + x\overline{x} = x(0 + \overline{x}) = x(\overline{x} + 0) = x\overline{x} = 0.$

(1.15) Z vlastností $(1.9), (1.3), (1.10), (1.4)$ dostáváme $x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$ a $x\overline{x} = \overline{x}x = 0$. Odtud plyne, že prvek x je komplement prvku $\overline{x}$, který má dle věty 1.1 právě jeden komplement. Tudíž $\overline{\overline{x}} = x$. □

Ukázali jsme idempotentnost prvků množiny $\mathcal{B}$ vztahy $(1.11), (1.12)$, agresivitu jedničky (příp. nuly) vztahem (1.13) příp. (1.14) a tzv. zákon dvojité negace vztahem (1.15).

Věta 1.3 (de Morganovy zákony). Nechť n je přirozené číslo a $\mathcal{B}$ je Booleova algebra. Pak pro libovolné prvky $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$ platí:

$$\overline{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \cdots \cdot \overline{x_n}\,, \tag{1.16}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}. \tag{1.17}$$

Důkaz. (1.16) Z vlastností $(1.5), (1.10), (1.7)$ dostáváme:
$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}) = (x_1\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n})+(x_2\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n})+\cdots+ + (x_n\cdot\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\cdots\cdot\overline{x_n}) = 0+0+\cdots+0 = 0$. Z vlastností $(1.6), (1.9), (1.8)$ dostáváme:
$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \cdots \cdot \overline{x_n}) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \overline{x_1}) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + + x_n + \overline{x_2}) \cdot \cdots \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \overline{x_n}) = 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$. Ukázali jsme, že prvek $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \cdots \cdot \overline{x_n}$ je komplementem prvku $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.
(1.17) Z vlastností $(1.5), (1.10), (1.7)$ dostáváme:
$(\overline{x_1}+\overline{x_2}+\cdots+\overline{x_n})(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n) = (\overline{x_1}\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)+(\overline{x_2}\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)+\cdots+ + (\overline{x_n}\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n) = 0+0+\cdots+0 = 0$. Z vlastností $(1.6), (1.9), (1.8)$ dostáváme:
$(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}) + (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n} + x_1) \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + + \overline{x_n} + x_2) \cdot \cdots \cdot (\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n} + x_n) = 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 1$. Ukázali jsme, že prvek $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ je komplementem prvku $\overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_n}$. □

Z axiomů a vlastností Booleova svazu plyne následující tvrzení:

Tvrzení 1.1. Booleův svaz $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, \vee, \wedge, 0, 1, ^{-})$ je Booleova algebra.

Ukážeme nyní, že platí v jistém smyslu opak.

Věta 1.4. Nechť $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^{-})$ je Booleova algebra. Položme pro $x, y \in \mathcal{B}$ $x \leq y$, jestliže $x \cdot y = x$ a $x + y = y$. Pak $\leq$ je uspořádání na $\mathcal{B}$ a $(\mathcal{B}, \leq)$ je Booleův svaz, kde oprerace $+$ je supremum, operace $\cdot$ je infimum, 0 je nejmenší prvek, 1 je největší prvek a operace $^{-}$ je komplement.

Důkaz. 1) $\leq$ je uspořádání.

a) reflexivita: ihned plyne ze vztahu (1.12) tak, že $xx = x \Rightarrow x \leq x$.

b) antisymetrie: $x \leq y$ a $y \leq x \;\Rightarrow\; xy = x$ a $yx = y$. Užitím vlastnosti (1.4) dostáváme $xy = x$ a $xy = y \;\Rightarrow\; x = y$.

c) tranzitivita: $x \leq y$ a $y \leq z \;\Rightarrow\; xy = x$ a $yz = y$. Substitucí dostáváme $x(yz) = x$ a z vlastnosti (1.2) plyne $(xy)z = x \;\Rightarrow\; xz = x \;\Rightarrow\; x \leq z$.

2) $(\mathcal{B}, \leq)$ je Booleův svaz.

a) operace $+$ je supremum: užitím předpokladů a vztahu (1.12) dostáváme $y = = yy = y(x+y) = y \;\Rightarrow\; y \leq x+y \;\Rightarrow\; x+y = \sup\{x,y\}$.

b) operace $\cdot$ je infimum: užitím předpokladů, vlastnosti (1.2) a vztahu (1.12) dostáváme $xy = (xx)y = x(xy) = x(yx) = (xy)x = xy \;\Rightarrow\; xy \leq x \;\Rightarrow\; x \cdot y = = \inf\{x,y\}$.

c) distributivní svaz: přímo z vlastnosti (1.5) plyne $x \wedge (y \vee z) = x(y+z) = = (xy) + (xz) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

d) 0 je nejmenší prvek: užitím vztahu (1.14) a vlastnosti (1.2) dostáváme $x \cdot 0 = = 0 \;\Rightarrow\; 0 \cdot x = 0 \;\Rightarrow\; 0 \leq x \quad$ pro $\forall\, x \in \mathcal{B}$.

e) 1 je největší prvek: z vlastnosti (1.9) plyne $y \cdot 1 = y \;\Rightarrow\; y \leq 1$ pro $\forall\, y \in \mathcal{B}$.

f) operace $^-$ je komplement: z vlastností (1.9), (1.10) dostáváme $x \vee \overline{x} = x + \overline{x} = = 1;\; x \wedge \overline{x} = x\overline{x} = 0 \quad$ pro $\forall\, x \in \mathcal{B}$. $\square$

Nyní zavedeme zobrazení, které zobrazují Booleův svaz na Booleovu algebru a opačně.

Definice 1.3. Nechť $(\mathcal{B}, \leq)$ je Booleův svaz a nechť $(\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)$ je Booleova algebra. Pak definujeme zobrazení $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ takto:

$$\mathcal{F}\left((\mathcal{B}, \leq)\right) = (\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-), \text{ kde } + = \vee,\; \cdot = \wedge\,;$$

$$\mathcal{G}\left((\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)\right) = (\mathcal{B}, \preceq), \text{ kde uspořádání } \preceq \text{ je definováno ve větě 1.4.}$$

Označme systém všech Booleových svazů symbolem $\mathcal{S}_1$ a systém všech Booleových algeber symbolem $\mathcal{S}_2$. Zobrazení $\mathcal{F}$ považujeme jako zobrazení z $\mathcal{S}_1$ do $\mathcal{S}_2$ a zobrazení $\mathcal{G}$ považujeme jako zobrazení z $\mathcal{S}_2$ do $\mathcal{S}_1$.

Věta 1.5. Nechť $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ jsou výše definnovaná zobrazení. Pak

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = id_{\mathcal{S}_1} \\ \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = id_{\mathcal{S}_2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{F}, \mathcal{G} \text{ bijekce; } \mathcal{G} = \mathcal{F}^{-1}.$$

Důkaz. 1) Připomeňme, že $\leq\ \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ a $\preceq\ \subseteq \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Budeme dokazovat rovnost množin $\leq$, $\preceq$.

a) Předpokládáme, že $[x, y] \in\ \leq$, tj. $x, y \in \mathcal{B}$, $x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x$ a $x \vee y = y \Rightarrow x \cdot y = x$ a $x + y = y \Rightarrow x \preceq y$.

b) Předpokládáme, že $[x, y] \in\ \preceq$, tj. $x, y \in \mathcal{B}$, $x \preceq y \Rightarrow x \cdot y = x$ a $x + y = y \Rightarrow x \wedge y = x$ a $x \vee y = y \Rightarrow x \leq y$.
Odtud dostáváme $\mathcal{G}\mathcal{F}(\mathcal{B}, \leq) = (\mathcal{B}, \preceq) \Rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F} = id_{\mathcal{S}_1}$.

2) Předpokládejme, že $(\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)$ je Booleova algebra, $\mathcal{G}\left((\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)\right) = (\mathcal{B}, \preceq)$ a $\mathcal{F}\mathcal{G}\left((\mathcal{B}, +, \cdot, 0, 1, ^-)\right) = (\mathcal{B}, +_{\mathcal{F}}, \cdot_{\mathcal{F}}, 0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}}, ^-{}_{\mathcal{F}})$. Nyní podle tvrzení 1.1 dostáváme $+ = \vee$, $\cdot = \wedge$, 0 je nejmenší prvek, 1 je největší prvek a operace $^-$ je komplement v $(\mathcal{B}, \preceq)$. Odtud plyne, že $+_{\mathcal{F}} = +$, $\cdot_{\mathcal{F}} = \cdot$, $0_{\mathcal{F}} = 0$, $1_{\mathcal{F}} = 1$, $^-{}_{\mathcal{F}} = {}^-$. Dostáváme tedy, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} = id_{\mathcal{S}_2}$. $\square$

Poznámka 1.1. Z věty 1.5 plyne, že můžeme bijekcí zobrazit Booleův svaz na Booleovu algebru a opačně inverzní bijekcí. Tento poznatek nám dává výhodu v tom, že vlastnosti a věty dokázané pro Booleovy algebry (svazy) se přenesou do Booleových svazů (algeber).

2 BOOLEOVY FUNKCE

V tomto odstavci bude $\mathcal{B}$ značit Booleův svaz.

Definice 2.1. Pro přirozené číslo n se z praktických důvodů definuje *Booleova funkce* n proměnných $F = F(x_1, \ldots, x_n)$, jako zobrazení $\mathcal{B}^n$ do $\mathcal{B}$, kde symbolem $\mathcal{B}^n$ rozumíme kartézský součin $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \times \cdots \times \mathcal{B}$ (n faktorů). Funkci F lze v explicitním tvaru zapsat pomocí závorek, proměnných a operací $\vee, \wedge, ^-$.

Rigorózně přesná definice *Booleovy funkce* je následující rekurzivní definice.

Definice 2.2. Nechť n je přirozené číslo, pak *Booleova funkce* n proměnných v Booleově svazu $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, 0, 1, ^-)$ je definována jako zobrazení $F = F(x_1, \ldots, x_n) : \mathcal{B}^n \longrightarrow \mathcal{B}$ definované rekurzivně:

1° Funkce $0, 1, x_1, \ldots, x_n$ jsou *Booleovy funkce*, tedy

$$F = F(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, \\ 1, \\ x_i \quad \text{pro } \forall\ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

pro $\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$. Nyní označme množinu všech těchto $n + 2$ funkcí symbolem $\mathcal{F}_0$.

2° Předpokládejme, že máme definovanou nějakou množinu $\mathcal{F}$ *Booleových funkcí* n proměnných v Booleově svazu $\mathcal{B}$, která obsahuje množinu $\mathcal{F}_0$.
Pak pro libovolné $f_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{F}$ funkce

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \vee f_2(x_1, \ldots, x_n),$$

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge f_2(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\overline{f_1(x_1, \ldots, x_n)}$$

pro $\forall\ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$ definujeme jako *Booleovy funkce* n proměnných. Označme $\mathcal{F}'$ množinu všech těchto funkcí. Zřejmě $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

3° Pro přirozené číslo N definujeme $\mathcal{F}^{(N)} = \left(\mathcal{F}^{(N-1)}\right)'$. Pak množinu všech Booleových funkcí n proměnných definujeme jako množinu $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathcal{F}^{(N)}$ a každou funkci z této množiny považujeme za *Booleovu funkci* n proměnných.

V tomto odstavci se zaměříme na popis Booleových funkcí pomocí tzv. *úplného disjunktního normálního tvaru*. Za tímto účelem zavedeme definici:

Definice 2.3. Nechť n je přirozené číslo a $x_1, \ldots, x_n$ proměnné. Nechť k je přirozené číslo, $k \le n$ a nechť $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$, kde $i_1, \ldots, i_k$ jsou přirozená čísla. Booleovu funkci $x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^*$ nazveme *neúplný člen*, jestliže $x_{i_j}^* = x_{i_j}$ nebo $x_{i_j}^* = \overline{x_{i_j}}$ pro $\forall\ 1 \le j \le k$. V případě, že $k = n$, nazveme tuto funkci *úplný člen*.

Poznamenejme, že podle definice 2.2 je každý neúplný člen Booleovou funkcí n proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

Tvrzení 2.1. Nechť $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ je Booleova funkce. Pak existuje celé nezáporné číslo m a neúplné členy $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tak, že platí

$$F = F(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m.$$

Poznámka 2.1. Pro $m = 0$ rozumíme výrazem $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_m$ prvek 0.

Lemma 2.1. Jestliže α, β jsou neúplné členy n proměnných, pak $\alpha \wedge \beta$ je ve tvaru tvrzení 2.1.

Důkaz. Máme $\alpha = x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^*$, $\beta = x_{j_1}^* \wedge x_{j_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{j_h}^*$, kde $1 \le k \le n, 1 \le h \le n$ a $i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n, j_1 < j_2 < \ldots < j_h \le n$ ($i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_h, k, h$ jsou přirozená čísla). Pro $u \in \{i_1, \ldots, i_k\}, v \in \{j_1, \ldots, j_h\}$ platí

$$x_u^* \wedge x_v^* = \begin{cases} x_u \wedge x_v, \\ x_u \wedge \overline{x_v}, \\ \overline{x_u} \wedge x_v, \\ \overline{x_u} \wedge \overline{x_v}. \end{cases}$$

V případě $u = v$, s využitím vlastnosti (1.10) a vztahu (1.12), dostáváme

$$x_u^* \wedge x_v^* = \begin{cases} x_u, \\ 0, \\ 0, \\ \overline{x_u} \end{cases} = \begin{cases} x_u^*, \\ 0. \end{cases}$$

Jestliže $x_u^* \wedge x_v^* = 0$, pak ze vztahu (1.14) plyne $\alpha \wedge \beta = 0$ a vzhledem k poznámce 2.1 lemma platí. Pokud $u \neq v$ ponecháme $\alpha \wedge \beta$ beze změny. □

Důkaz (Tvrzení 2.1). Užijeme definice 2.2 a značení $\mathcal{F}^{(N)}$ pro N přirozené.

1) Nechť funkce F je ve tvaru $1°$. Pak v případě $F = 0$ je podle tvrzení 2.1 F v uvedeném tvaru. Jestliže $F = 1$, pak $F = x_1 \vee \overline{x_2}$, tudíž F je také v uvedeném tvaru. V případě $F = x_i$ pro $1 \leq i \leq n$ zřejmě též platí tvrzení 2.1.

2) Pro přirozené číslo N máme $\mathcal{F}^{(N)} = \left(\mathcal{F}^{(N-1)}\right)'$ a předpokládejme, že pro $\mathcal{F}^{(N-1)}$ tvrzení platí.

3) Nechť $f_1, f_2 \in \mathcal{F}^{(N-1)}$, kde $f_1 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$, $f_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_M$ a m, M jsou přirozená čísla. Pak máme

a) $f_1 \vee f_2 = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m \vee \beta_1 \vee \ldots \vee \beta_M$.

b) $f_1 \wedge f_2 = (\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_m) \wedge (\beta_1 \vee \ldots \vee \beta_M) = (\alpha_1 \wedge \beta_1) \vee (\alpha_1 \wedge \beta_2) \vee \cdots \vee (\alpha_i \wedge \wedge \beta_j) \vee \cdots \vee (\alpha_m \wedge \beta_M)$. Podle lemmatu 2.1 je $f_1 \wedge f_2$ v požadovaném tvaru.

c) Ze vztahu (1.16) dostáváme $\overline{f_1} = \overline{\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m} = \overline{\alpha_1} \wedge \overline{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge \overline{\alpha_m}$, kde $\overline{\alpha_p} = \overline{x^*_{i_1} \wedge x^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge x^*_{i_k}} = \overline{x^*_{i_1}} \vee \overline{x^*_{i_2}} \vee \cdots \vee \overline{x^*_{i_k}} = y^*_{i_1} \vee y^*_{i_2} \vee \cdots \vee \ y^*_{i_k}$ a $\overline{\alpha_q} = = \overline{x^*_{j_1} \wedge x^*_{j_2} \wedge \cdots \wedge x^*_{j_h}} = \overline{x^*_{j_1}} \vee \overline{x^*_{j_2}} \vee \cdots \vee \overline{x^*_{j_h}} = y^*_{j_1} \vee y^*_{j_2} \vee \cdots \vee \ y^*_{j_h}$ pro $\forall\ 1 \leq p, q \leq m$. Ukážeme, že $\overline{\alpha_p} \wedge \overline{\alpha_q}$ pro $\forall\ p, q$, přičemž $p \neq q$, je ve tvaru tvrzení 2.1. Z vlastnosti (1.5) máme $\overline{\alpha_p} \wedge \overline{\alpha_q} = (y^*_{i_1} \vee y^*_{i_2} \vee \cdots \vee \ y^*_{i_k}) \wedge (y^*_{j_1} \vee \vee y^*_{j_2} \vee \cdots \vee y^*_{j_h}) = (y^*_{i_1} \wedge y^*_{j_1}) \vee (y^*_{i_1} \wedge y^*_{j_2}) \vee \cdots \vee (y^*_{i_k} \wedge y^*_{j_h})$, kde

$$y^*_u \wedge y^*_v = \begin{cases} y_u \wedge y_v, \\ y_u \wedge \overline{y_v}, \\ \overline{y_u} \wedge y_v, \\ \overline{y_u} \wedge \overline{y_v} \end{cases}$$

pro $\forall\ i_1 \leq u \leq i_k$ a $\forall\ j_1 \leq v \leq j_h$. V případě $u = v$ dostáváme

$$y^*_u \wedge y^*_v = \begin{cases} y_u, \\ 0, \\ 0, \\ \overline{y_u} \end{cases} = \begin{cases} y^*_u, \\ 0. \end{cases}$$

Pokud $u \neq v$ ponecháme $\overline{\alpha_p} \wedge \overline{\alpha_q}$ beze změny. □

Lemma 2.2. Každý neúplný člen $\alpha = x^*_{i_1} \wedge x^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge x^*_{i_k}$ (z definice 2.3) lze zapsat jako Booleova funkce n proměnných $F = F(x_1, \ldots, x_n) = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_p$, kde $\beta_1, \ldots, \beta_p$ jsou úplné členy a $p = 2^{n-k}$.

Důkaz. Nechť $\alpha = x^*_{i_1} \wedge x^*_{i_2} \wedge \cdots \wedge x^*_{i_k}$ je neúplný člen. Označme symbolem A množinu $\{i_1, \ldots, i_k\}$ a symbolem B množinu $\{1, \ldots, n\}$. Zřejmě platí $A \subseteq B$. Nechť symbol C značí doplněk množiny A na množině B. Pak užitím vlastností (1.8), (1.9), (1.5) dostáváme $\alpha = x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^* = x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge x_{i_k}^* \wedge 1 = x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge$ $\wedge\, x_{i_k}^* \wedge \bigwedge_{\forall j \in C} (x_j \vee \overline{x_j}) = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_p$, kde $\beta_1, \ldots, \beta_p$ jsou úplné členy a $p = 2^{|C|}$, kde $|C| = n - k$. $\square$

Definice 2.4. Nechť $F = F(x_1, \ldots, x_n), G = G(x_1, \ldots, x_n)$ jsou Booleovy funkce n proměnných ($F, G : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$), kde $G = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$, m je celé nezáporné číslo a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou navzájem různé úplné členy. Řekneme, že G je *úplný disjunktní normální tvar* funkce F, jestliže $F = G$ (jakožto funkce).

Poznámka 2.2. Pokud $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou navzájem různé neúplné členy, pak řekneme, že G je *disjunktní normální tvar* funkce F.

Věta 2.1 (existence úplného disjunktního normálního tvaru). Nechť F je Booleova funkce. Pak existuje Booleova funkce G jakožto úplný disjunktní normální tvar funkce F.

Důkaz. Nechť $F = F(x_1, \ldots, x_n)$ je Booleova funkce. Pak podle tvrzení 2.1 a poznámky 2.2 existuje Booleova funkce $G = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$ jakožto disjunktní normální tvar funkce F, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou neúplné členy. Pak užitím lemmatu 2.2 a vztahu (1.11) dostáváme $G = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_q$, kde $\beta_1, \ldots, \beta_q$ jsou různé úplné členy a q je přirozené číslo. $\square$

Úmluva: Důkaz následující věty 2.2 o jednoznačnosti vyjádření Booleovy funkce pomocí úplného disjunktního normálního tvaru provedeme rigorózně matematicky přesně. Za tím účelem si zavademe pracovní pojmy „výraz“ a „ÚDN-vyjádření“, které nebudeme číslovat. Tyto pojmy se dále v textu nevyskytují mimo odstavec 3.1, kde s těmito užijeme i pojmy „neúplný výraz“ a „DN-vyjádření“.

Budeme předpokládat, že $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{J} = \{0, 1\}$ a $\mathbb{L} = \{0, 1, 2\}$.

Výrazem ω budeme rozumět zobrazení množiny $\mathbb{M}$ do $\mathbb{J}$. Toto zobrazení interpretujeme jako dříve definovaný úplný člen. Množinu všech výrazů označíme symbolem Ω. Zobrazení z množiny Ω do $\mathbb{J}$ nazveme *ÚDN-vyjádření.* Tento pojem interpretujeme jako úplný disjunktní normální tvar. Pro pojmy výraz a ÚDN-vyjádření definujeme pojmy „funkce výrazu“ a „funkce vyjádření“ následovně:

Nechť $\omega \in \Omega, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$. Položme

$$\widetilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\omega(1)} \cdot x_2^{\omega(2)} \cdot \cdots \cdot x_n^{\omega(n)},$$

kde

$$x_i^{\omega(i)} = \begin{cases} x_i, & \text{jestliže } \omega(i) = 1 \\ \overline{x_i}, & \text{jestliže } \omega(i) = 0 \end{cases}$$

pro $1 \leq i \leq n$. $\widetilde{\omega}$ je zobrazení $\mathcal{B}^n$ do $\mathcal{B}$ a zřejmě $\widetilde{\omega}$ je Booleova funkce, kterou nazveme *funkce výrazu* ω.

Nechť v je ÚDN-vyjádření a $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$. Položme

$$\widetilde{v}(x_1, \ldots, x_n) = \sup\{v(\omega) \cdot \widetilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) : \ \omega \in \Omega\}.$$

Pak $\widetilde{v}$ je zobrazení $\mathcal{B}^n$ do $\mathcal{B}$, které je Booleovou funkcí. Tuto funkci nazveme *funkce vyjádření* v.

Neúplným výrazem γ budeme rozumět zobrazení množiny $\mathbb{M}$ do $\mathbb{L}$. Toto zobrazení interpretuje dříve definovaný neúplný člen. Množinu všech neúplných výrazů označíme symbolem Γ. Zobrazení z množiny Γ do $\mathbb{J}$ nazveme *DN-vyjádření*. Tento pojem interpretujeme jako disjunktní normální tvar.

Pro důkaz jednoznačnosti úplného disjunktního normálního tvaru má zásadní význam následující lemma.

Lemma 2.3. Nechť ω_0 je výraz. Pak existují $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$ tak, že $\widetilde{\omega_0}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ a $\widetilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pro každé $\omega \in \Omega - \{\omega_0\}$.

Důkaz. Pro $1 \leq i \leq n$ položme

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \omega_0(i) = 1 \\ 0, \text{ jestliže } \omega_0(i) = 0. \end{cases}$$

Tudíž

$$x_i^{\omega_0(i)} = \begin{cases} 1, \text{ jestliže } \omega_0(i) = 1 \\ \overline{0}, \text{ jestliže } \omega_0(i) = 0 \end{cases} = 1.$$

Odtud dostáváme $\widetilde{\omega_0}(x_1, \ldots, x_n) = 1$.

Nechť $\omega \in \Omega - \{\omega_0\}$. Pak existuje $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ tak, že $\omega(i) \neq \omega_0(i)$. Tudíž

$$x_i^{\omega_0(i)} = \begin{cases} x_i \text{ pro } \omega(i) = 1 \\ \overline{x_i} \text{ pro } \omega(i) = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_i \text{ pro } \omega_0(i) = 0 \\ \overline{x_i} \text{ pro } \omega_0(i) = 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ pro } \omega_0(i) = 0 \\ \overline{1} \text{ pro } \omega_0(i) = 1 \end{cases} = 0.$$

Odtud plyne $\widetilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. $\square$

Tvrzení 2.2. Pro ÚDN-vyjádření v_1, v_2 máme $v_1 = v_2$, právě když $\widetilde{v_1} = \widetilde{v_2}$. Jinými slovy: dvě vyjádření jsou si rovny, právě když jsou si rovny jakožto funkce.

Důkaz. Zřejmě z rovnosti $v_1 = v_2$ plyne $\widetilde{v_1} = \widetilde{v_2}$. Předpokládejme, že $\widetilde{v_1} = \widetilde{v_2}$ a $v_1 \neq v_2$. Pak existuje $\omega_0 \in \Omega$ takové, že $v_1(\omega_0) \neq v_2(\omega_0)$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $v_1(\omega_0) = 1, v_2(\omega_0) = 0$. Podle lemmatu 2.3 existují $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{B}$ tak, že $\widetilde{\omega_0}(x_1, \ldots, x_n) = 1$ a $\widetilde{\omega}(x_1, \ldots, x_n) = 0$ pro každé $\omega \in \Omega - \{\omega_0\}$. Podle definice máme

$\widetilde{v_1}(x_1,\ldots,x_n) = v_1(\omega_0)\cdot\widetilde{\omega_0}(x_1,\ldots,x_n) \vee \sup\{v_1(\omega)\widetilde{\omega}(x_1,\ldots,x_n) :$
$\omega \in \Omega - \{\omega_0\}\} = 1\cdot 1 \vee 0 = 1,$
$\widetilde{v_2}(x_1,\ldots,x_n) = v_2(\omega_0)\cdot\widetilde{\omega_0}(x_1,\ldots,x_n) \vee \sup\{v_2(\omega)\widetilde{\omega}(x_1,\ldots,x_n) :$
$\omega \in \Omega - \{\omega_0\}\} = 0\cdot 1 \vee 0 = 0,$
což je spor s předpokladem $\widetilde{v_1} = \widetilde{v_2}$. □

Z výše uvedeného tvrzení pak snadno plyne následující věta o jednoznačnosti úplného disjunktního normálního tvaru.

Věta 2.2 (jednoznačnost úplného disjunktního normálního tvaru). Jestliže pro Booleovu funkci $F = F(x_1,\ldots,x_n)$ existují úplné disjunktní normální tvary $G_1 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$, $G_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_M$, kde m, M jsou celá nezáporná čísla a α_i, β_j jsou úplné členy $(1 \le i \le m, 1 \le j \le M)$, pak $m = M$ a pro m, M přirozené existuje permutace φ množiny $\{1, 2, \ldots, M\}$ tak, že $\alpha_i = \beta_{\varphi(i)}$ pro $\forall\ 1 \le i \le m$.

Důkaz. Nechť $G_1 = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_m$, $G_2 = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_M$ jsou úplné disjunktní normální tvary funkce $F = F(x_1,\ldots,x_n)$. Dle úmluvy jsou G_1, G_2 ÚDN-vyjádření. Zřejmě $\widetilde{G_1} = \widetilde{G_2}$ jakožto funkce. Pak z tvrzení 2.2 plyne, že $G_1 = G_2$ jakožto vyjádření. □

3 METODY MINIMALIZACE

V této kapitole se budeme zabývat minimalizačními metodami, které minimalizují Booleovu funkci zadanou v disjunktním normálním tvaru. Za tímto účelem si nejprve zavedeme potřebné vztahy a definice.

3.1 Popis Booleových funkcí a minimalizace

K důkazům vět v této části užijeme pojmy z úmluvy v kapitole 2 a následující tvrzení.

Tvrzení 3.1. Nechť $\mathbb{Q}$ je q-prvková množina a $\mathbb{P}$ je p-prvková množina. Tedy $|\mathbb{Q}| = q$ a $|\mathbb{P}| = p$. Pak počet všech zobrazení množiny $\mathbb{Q}$ do množiny $\mathbb{P}$ je p^q.

Důkaz. Z předpokladu $|\mathbb{P}| = p$ plyne, že pro každý prvek z množiny $\mathbb{Q}$ máme právě p možností jak jej zobrazit. Z předpokladu $|\mathbb{Q}| = q$ plyne, že počet všech zobrazení množiny $\mathbb{Q}$ do množiny $\mathbb{P}$ je $\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{q\text{-krát}} = p^q$. □

Věta 3.1. Počet všech Booleových funkcí n proměnných v úplném disjunktním normálním tvaru je 2^{2^n}.

Důkaz. Dle výše zmíněné úmluvy budeme dokazovat počet ÚDN-vyjádření. Připomeňme, že $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{M} = \{1, 2, \dots, n\}$, $\mathbb{J} = \{0, 1\}$ a $\mathbb{L} = \{0, 1, 2\}$. Nechť $\alpha = x_1^{\omega(1)} \cdot x_2^{\omega(2)} \cdot \dots \cdot x_n^{\omega(n)}$ je úplný člen, kde

$$x_i^{\omega(i)} = \begin{cases} x_i & \text{pro } \omega(i) = 1, \\ \overline{x_i} & \text{pro } \omega(i) = 0 \end{cases}$$

pro $\forall\ 1 \le i \le n$. Úplný člen si tudíž můžeme představit jako zobrazení množiny $\mathbb{M}$ do $\mathbb{J}$. Množinu všech těchto úplných členů označíme symbolem Ω. Podle tvrzení 3.1 dostáváme, že $|\Omega| = 2^n$. ÚDN-vyjádření neboli úplný disjunktní normální tvar Booleovy funkce n proměnných chápeme jako zobrazení množiny Ω do $\mathbb{J}$. Z tvrzení 3.1 ihned plyne, že počet všech Booleových funkcí n proměnných v úplném disjunktním normálním tvaru je právě $2^{|\Omega|} = 2^{2^n}$. □

Poznámka 3.1. Jako Booleovu funkci n proměnných v úplném disjunktním normálním tvaru považujeme i Booleovu funkci tvaru $F = F(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Věta 3.2. Počet všech Booleových funkcí n proměnných v disjunktním normálním tvaru je $2^{3^n - 1}$.

Důkaz. Dle úmluvy budeme dokazovat počet DN-vyjádření. Nechť $\alpha = x_1^{\omega(1)} \cdot x_2^{\omega(2)} \cdot \cdots \cdot x_n^{\omega(n)}$ je neúplný člen, kde

$$x_i^{\omega(i)} = \begin{cases} x_i & \text{pro } \omega(i) = 1, \\ \overline{x_i} & \text{pro } \omega(i) = 0, \\ 0 & \text{pro } \omega(i) = 2 \end{cases}$$

pro $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Neúplný člen je tedy zobrazení množiny $\mathbb{M}$ do $\mathbb{L}$. Množinu všech těchto neúplných členů označíme symbolem Γ. Z tvrzení 3.1 plyne, že $|\Gamma| = 3^n$. Poznamenejme, že množina Γ obsahuje i tzv. *nulový neúplný člen* $\beta = x_1^{\omega(1)} \cdot x_2^{\omega(2)} \cdot \cdots \cdot x_n^{\omega(n)}$, kde $\omega(i) = 2$ pro $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Z vlastnosti (1.7) plyne, že nulový neúplný člen neovlivní výslednou funkci, tudíž jej neuvažujeme. Zavedeme množinu Δ, která obsahuje všechny neúplné členy s vyjímkou nulového neúplného členu. Zřejmě $|\Delta| = 3^n - 1$. DN-vyjádření neboli disjunktní normální tvar Booleovy funkce n proměnných chápeme v tomto případě jako zobrazení množiny Δ do $\mathbb{J}$. Podle tvrzení 3.1 dostáváme, že počet všech Booleových funkcí n proměnných v disjunktním normálním tvaru je právě $2^{|\Delta|} = 2^{3^n-1}$. $\square$

n	**#údnt**	**#dnt**
1	4	4
2	16	256
3	256	67 108 864
4	65 536	2^{80}
5	2^{32}	2^{242}

Tab. 3.1: Počty Booleových funkcí

n: počet proměnných
#údnt: počet Booleových funkcí v úplném disjunktním normálním tvaru
#dnt: počet Booleových funkcí v disjunktním normálním tvaru

Definice 3.1. Nechť $F = F(x_1, \ldots, x_n), G = G(x_1, \ldots, x_n)$ jsou Booleovy funkce n proměnných, kde $G = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$, m je celé nezáporné číslo a $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou navzájem různé neúplné členy. Řekneme, že G je *minimální tvar* funkce F, jestliže $F = G$ (jakožto funkce) a pro každou Booleovu funkci $H = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_p$, kde p je celé nezáporné číslo, $p < m$ a $\beta_1, \ldots, \beta_p$ jsou navzájem různé neúplné členy, platí $F \neq H$ (jakožto funkce).

Definice 3.2. Nechť $F = F(x_1, \ldots, x_n), G = G(x_1, \ldots, x_n)$ jsou Booleovy funkce n proměnných, kde funkce G je minimální tvar funkce F. Pak metodu, pomocí které funkci F převedeme na funkci G, definujeme jako *minimalizační metodu.*

3.2 Minimalizace pomocí ekvivalence

Připomeňme předpoklad, že zadaná Booleova funkce n proměnných, určená k minimalizaci, je v disjunktním normálním tvaru.

Hlavní myšlenka:

1. Vygenerujeme všechny Booleovy funkce n proměnných v disjunktním normálním tvaru. Množinu všech těchto funkcí označíme symbolem S.
2. Rozložíme množinu těchto funkcí na třídy ekvivalence $S_1, S_2, \ldots, S_u$.
3. Vybereme ekvivalentní třídu k zadané Booleově funkci.
4. Z této třídy vybereme pouze minimální tvary.

Následující rozbor nám pomůže objasnit hlavní body myšlenky.

Rozbor:

1. Z věty 3.2 plyne, že $|S| = 2^{3^n-1}$.
2. Z vět 2.1 a 2.2 plyne, že každá Booleova funkce lze převést na úplný disjunktní normální tvar a ten je určen jednoznačně. Pokud $S_1, S_2, \ldots, S_u$ je rozklad množiny S na třídy ekvivalence, pak podle věty 3.1 dostáváme, že $u = 2^{2^n}$. Tudíž počet tříd ekvivalencí je roven počtu Booleových funkcí v úplném disjunktním normálním tvaru.
3. Pod pojmem ekvivalentní rozumíme rovnost jakožto funkce.
4. V tomto případě si pod pojmem minimální tvar můžeme představit funkci s nejmenším počtem neúplných členů.

Nespornou výhodou této metody je, že nám poskytne všechny minimální tvary zadané funkce. Na druhou stranu je tato metoda pouze teoretická a pro praxi, v této podobě, téměř nepoužitelná. Již pro $n = 4$ by množina S obsahovala 2^{80} funkcí ($\doteq 1{,}2 \cdot 10^{24}$), což je z hlediska časového (generování této množiny) a paměťového nerealizovatelný úkol.

3.3 Quineova-McCluskeyova metoda

Upozorněme, že tato metoda není sama o sobě minimaziční metodou. Z tohoto důvodu se v praxi nepoužívá samostatně, ale společně s metodou mřížky prostých implikantů, kterou si uvedeme v části 3.4. Tato dvojice metod nám poskytuje minimální tvar zadané funkce.

Postup:

1. Vstupní funkci převedeme do úplného disjunktního normálního tvaru.
2. Všechny úplné členy převedeme do dvojkového zápisu. Ke každému připíšeme jeho hodnotu v desítkové soustavě (tuto hodnotu užijeme následně při aplikaci metody mřížky prostých implikantů na výsledek této metody).
3. Vytvoříme první soupis tak, že pod sebe sepíšeme jednotlivé dvojkové úplné členy podle indexů. V případě rovnosti indexů rozhoduje o pořadí desítkové vyjádření dvojkového zápisu úplného členu.
4. Vytvoříme další soupis tím způsobem, že porovnáváme spolu vždy dva členy, které se liší v indexu o jedničku, dokud nevyčerpáme všechny možnosti. Pokud se dvojice členů liší pouze v jedné dvojkové číslici, zkrátíme je a do nového soupisu napíšeme nově vzniklý zkrácený člen i s desítkovými vyjádřeními členů, ze kterých vznikl. Zkrácené členy zaškrtneme. Takto postupujeme dokud lze dva členy zkrátit tzn. vytvořit další soupis.
5. Vypíšeme všechny nezaškrtnuté členy i se všemi desítkovými vyjádřeními. Tyto členy budeme dále označovat jako *prosté implikanty*.

V následujícím rozboru si objasníme jednotlivé body postupu a paralelně provedeme ukázkový příklad pro vstupní funkci $F = \overline{x}z + \overline{x}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Rozbor:

1. Převod vstupní funkce na úplný disjunktní tvar provedeme s využitím vlastností (1.8), (1.9), (1.6) a vztahu (1.11).

$$F = \overline{x}\,z + \overline{x}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,z + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,y\,z + x\,\overline{y}\,z$$

2. Převod úplného členu do dvojkového zápisu se provádí tak, že přímou proměnnou označíme číslicí 1, negovanou proměnnou číslicí 0.

$$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = 0\ 0\ 0,\ \ \overline{x}\,\overline{y}\,z = 0\ 0\ 1,\ \ \overline{x}\,y\,\overline{z} = 0\ 1\ 0,\ \ \overline{x}\,y\,z = 0\ 1\ 1,\ \ x\,\overline{y}\,z = 1\ 0\ 1$$

3. Počet jedniček dvojkového zápisu členu označíme jako *index*. Při vytváření soupisů oddělujeme členy s rozdílnými indexi vodorovnou čarou. Hodnotu členu v desítkové soustavě zapisujeme vlevo.

0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
5	1	0	1

(první soupis)

4. Při zkrácení dvou členů lišících se právě v jedné dvojkové číslici nahradíme tuto číslici symbolem $-$, aby se zachovalo původní přiřazení číslic k proměnným. Toto pravidlo je založeno na vlastnostech $(1.5), (1.9), (1.8)$. Pokud se v soupisu vyskytnou stejné řádky, aplikujeme vztah (1.11) a všechny tyto řádky, s výjimkou jednoho, škrtneme.

0	0	0	0	✓
1	0	0	1	✓
2	0	1	0	✓
3	0	1	1	✓
5	1	0	1	✓

(první soupis)

$\Longrightarrow$

0,1	0	0	-	✓
0,2	0	-	1	✓
1,3	0	-	1	✓
1,5	-	0	1	
2,3	0	1	-	✓

(druhý soupis)

$\Longrightarrow$

0,1,2,3	0	-	-
~~0,1,2,3~~	~~0~~	~~-~~	~~-~~

(třetí soupis)

5. Všechny nezaškrtnuté členy tvoří po převedení z dvojkového zápisu do zápisu pomocí proměnných výsledek Quienovy-McCluskeyovy metody.

   Nezaškrtnuté členy = prosté implikanty

1,5	-	0	1	=	$\overline{y}z(1,5)$
0,1,2,3	0	-	-	=	$\overline{x}(0,1,2,3)$

   Výsledek Quineovy-McCluskeyovy metody:

$$F = \overline{y}z + \overline{x}$$

3.4 Mřížka prostých implikantů

Upozorněme, že tuto metodu nelze užít samostatně. Aplikuje se na prosté implikanty vzniklé pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody. Ukážeme si tedy, že ne všechny prosté implikanty jsou nezbytné.

Postup:

1. Vypíšeme prosté implikanty vzniklé pomocí Quineovy-McCluskeyovy metody.
2. Sestrojíme tzv. mřížku prostých implikantů ukazující, jaké prosté implikanty nahrazují původní úplné členy (původního úplného disjunktního normálního tvaru funkce).
3. Pomocí této mřížky určíme, které prosté implikanty jsou nezbytné.
4. Ze zbylých prostých implikantů vybereme nejmenší možný soubor tak, aby jsme obsáhli všechny původní úplné členy.
5. Tento soubor, společně s nezbytnými prostými implikanty, tvoří výsledek metody mřížky prostých implikantů aplikované na Quineovu-McCluskeyovu metodu.

Společně s rozborem provedeme ukázkový příklad pro vstupní funkci $F = \overline{w}xy + wy\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + w\overline{x}yz$.

Rozbor:

1. Po aplikaci Quineovy-McCluskeyovy metody na vstupní funkci F dostáváme následující prosté implikanty:

$$\overline{w}xy(6,7),\ wy\overline{z}(10,14),\ w\overline{x}y(10,11),\ xy\overline{z}(6,14)$$

2. Mřížka prostých implikantů je tabulka, kde sloupce tvoří desítková vyjádření původních úplných členů a řádky tvoří pouze složky proměnných z prostých implikantů. Symbolem $\times$ do tabulky označíme, ze kterých původních úplných členů byl příslušný prostý implikant vytvořen.

	6	7	10	11	14
$\overline{w}xy$	$\times$	$\times$			
$wy\overline{z}$			$\times$		$\times$
$w\overline{x}y$			$\times$	$\times$	
$xy\overline{z}$	$\times$				$\times$

3. Nezbytný implikant je takový prostý implikant, který jako jediný přísluší úplnému členu. To znamená, že pokud je ve sloupci pouze jeden křížek, tak příslušný prostý implikant je nezbytný. Následně označíme všechny sloupce odpovídající nezbytným implikantům symbolem $\checkmark$ a příslušné nezbytné implikanty symbolem $*$. V našem příkladě jsou nezbytné implikanty $\overline{w}xy$ (kvůli členu 7) a $w\overline{x}y$ (kvůli členu 11).

	6$\checkmark$	7$\checkmark$	10$\checkmark$	11$\checkmark$	14
$*\ \overline{w}xy$	$\times$	$\times$			
$wy\overline{z}$			$\times$		$\times$
$*\ w\overline{x}y$			$\times$	$\times$	
$xy\overline{z}$	$\times$				$\times$

4. Soubor zbylých prostých implikantů vybíráme takovým způsobem, aby jsme obsáhli všechny původní úplné členy (všechny sloupce). V našem případě nám chybí zahrnout sloupec 14. Máme dvě možnosti, a to buď vybrat prostý implikant $wy\overline{z}$, nebo $xy\overline{z}$. Vybereme tedy první možnost, a to prostý implikant $wy\overline{z}$. Vidíme, že v tuto chvíli jsou všechny úplné členy obsaženy a tudíž prostý implikant $xy\overline{z}$ je nadbytečný (neovlivní výsledek).

5. Výsledkem jsou nezbytné implikanty společně s nejmenším možným souborem prostých implikantů tak, aby se obsáhly všechny původní úplné členy.

   Shrnutí: Zadaná funkce:

$$F = \overline{w}xy + wy\overline{z} + w\overline{x}y\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{w}xy\overline{z} + w\overline{x}yz$$

   Výsledek Quineovy-McClukeyovy metody:

$$F = \overline{w}xy + wy\overline{z} + w\overline{x}y + xy\overline{z}$$

   Po aplikaci metody mřížky prostých implikantů:

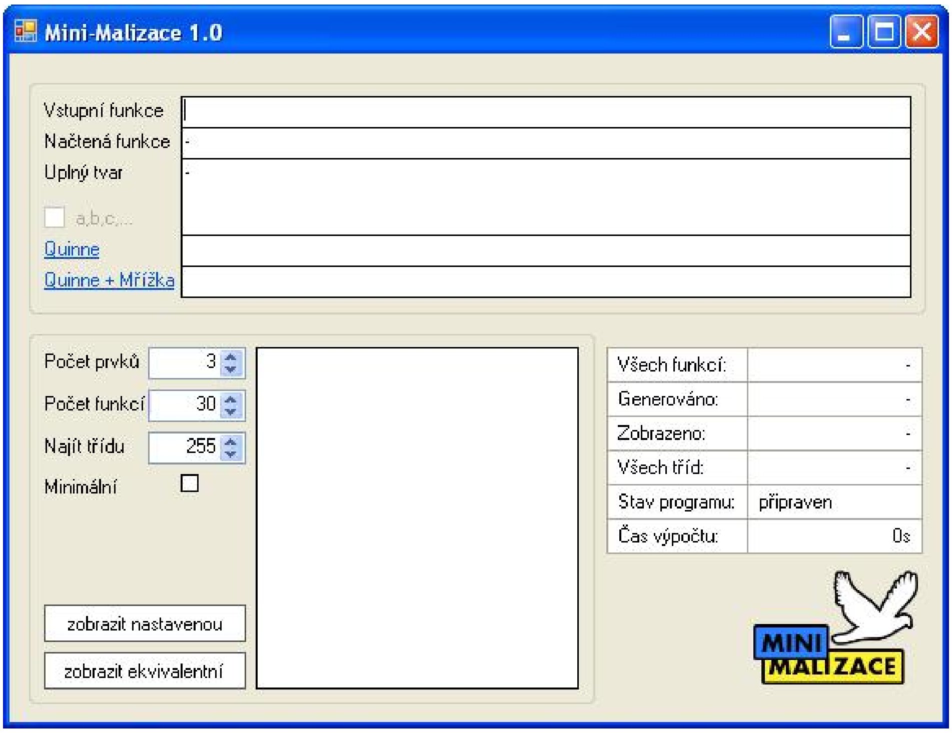
$$F = \overline{w}xy + wy\overline{z} + w\overline{x}y$$

Dvojice Quineova-McCluskeyova metoda a metoda mřížky prostých implikantů tvoří minimalizační metodu, která je v praxi nejpoužívanější.

4 MINI-MALIZACE 1.0

Program byl naprogramován v jazyce C# (ve vývojovém prostředí MS Visual Studio 2008 Express) pro .NET Framework verze 3.5. Je koncipován do jednoho (hlavního) okna, což poskytuje přehledné uživatelské prostředí. Slouží především k minimalizaci Booleových funkcí pomocí Quieneovy-McCluskeyovy metody samostatně i s aplikací mřížky prostých implikantů, která je situována v horní části hlavního okna a k minimalizaci pomocí ekvivalence, která je umístěna v dolní části okna. V pravé části jsou umístěny statistiky, které téměř výhradně souvisí s minimalizací pomocí ekvivalence. Uvedené metody jsou popsány v kapitole 3.

Nyní se budeme zabývat vstupy a výstupy jednotlivých částí programu.



Obr. 4.1: Hlavní okno programu

Quine, Quine + Mřížka

Vstupy:

1. *Vstupní funkce* - Jedná se o společný vstupní parametr všech uvedených metod. Funkce, maximálně osmi proměnných, musí být v disjunktním normálním tvaru. Malým písmenem abecedy značíme negaci příslušného velkého písmene abecedy, jakožto proměnné.

2. *a,b,c,...* - Uvedené zaškrtávací pole převádí výstupy Quine a Quine + Mřížka do proměnných $a, b, c, ...$ atd. v případě, že vstupní funkce byla zadána v jiných.

Výstupy:

1. *Načtená funkce* - Proměnné v členech vstupní funkce se přeskládají dle abecedy.
2. *Úplný tvar* - Zobrazí úplný disjunktní normální tvar vstupní funkce.
3. *Quine* - Výsledek Quineovy-McCluskeyovy metody.
4. *Quine + Mřížka* - Výsledek Quineovy-McCluskeyovy metody s aplikací metody mřížky prostých implikantů.

Ekvivalence

S hlavní myšlenkou minimalizační metody pomocí ekvivalence jsme se seznámili v části 3.1, kde jsme rovněž uvedli nepraktičnost tohoto postupu. Pro programovou implementaci je tudíž nutná jistá modifikace.

Jedním způsobem je generování funkcí do šířky využitím datové struktury typu *fronta* a dále nastavení podmínek pro ukončení generování, jak jednotlivých větví, tak i pro celkové generování. Tímto snížíme časovou náročnost algoritmu. Zároveň ukládáme pouze funkce, které se zobrazí ve výstupu, což sníží paměťovou náročnost algoritmu.

Samotný program se spouští pomocí tlačítek *Zobrazit nastavenou* nebo *Zobrazit ekvivalentní*. Nyní si uvedeme vstupy a výstupy pro tyto možnosti.

Zobrazit nastavenou:
Vstupy:

1. *Počet prvků* - Udává počet proměnných výstupních funkcí.
2. *Počet funkcí* - Nastavuje horní mez počtu zobrazených výstupních funkcí.
3. *Najít třídu* - Zvolíme třídu ekvivalentních funkcí, které se zobrazí.
4. *Minimální* - Zaškrtávací pole zobrazí pouze minimální tvary.

Výstupy:

1. *List funkcí* - Zde se zobrazují funkce dle vstupního nastavení.

2. *Statistiky* - Uvádějí se zde informace o výpočtu. Podrobněji budou popsány v následující části.

Zobrazit ekvivalentní:
Vstupy:

1. *Zadaná funkce* - Ze vstupní funkce se vypočtou příslušné parametry (počet prvků a číslo hledané třídy ekvivalentních funkcí). Zadaná vstupní funkce musí být funkce maximálně čtyř proměnných.

2. Dále *Počet funkcí* a zaškrtávací pole *Minimální*.

Výstupy:

List funkcí a *Statistiky*

Statistiky

1. *Všech funkcí* - Udává počet Booleových funkcí v disjunktním normálním tvaru dle věty 3.2.

2. *Generováno* - Počet vygenerovaných funkcí potřebných k naplnění výstupního *Listu funkcí* dle vstupních parametrů.

3. *Zobrazeno* - Počet zobrazených funkcí ve výstupním *Listu funkcí*.

4. *Všech tříd* - Udává počet Booleových funkcí v úplném disjunktním normálním tvaru dle věty 3.1.

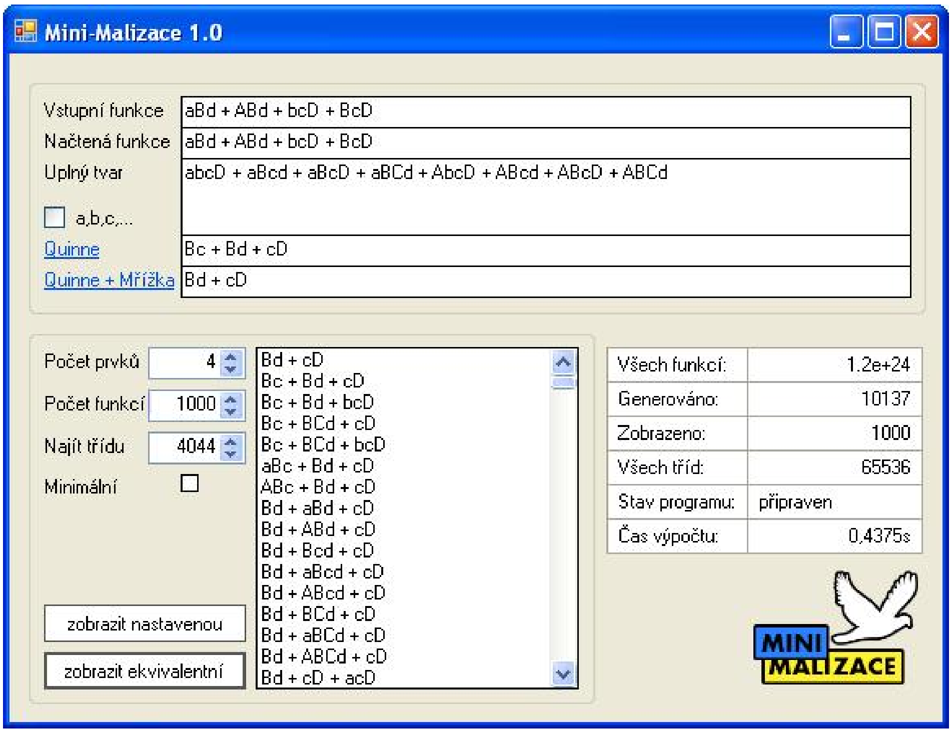
5. *Stav programu* - Vypovídá o aktuálním stavu programu (připraven, generuje, vypisuje, ...).

6. *Čas výpočtu* - Zobrazuje čas posledního výpočtu.

Příklad

Na závěr této práce si předvedeme funkčnost programu Mini-Malizace 1.0. Na ukázkovém příkladě si předvedeme minimalizaci pomocí ekvivalence, včetně statistik a Quineovu-McCluskeyovu metodu samostatně i s aplikací metody mřížky prostých implikantů.

Za společný vstup všech zmíněných částí programu volíme funkci $F = \bar{a}b\bar{d} + ab\bar{d} + \bar{b}\bar{c}d + b\bar{c}d$.



Obr. 4.2: Ukázka programu

Na ukázkovém příkladě (obr. 4.2) opět vidíme, že Quineova-McCluskeyova metoda není minimalizační metodou. Tou se stává až po aplikaci metody mřížky prostých implikantů, která nám poskytuje stejný výsledek jako metoda minimalizace pomocí ekvivalence.

ZÁVĚR

V práci jsme ukázali navzájem jednojednoznačný vztah mezi Booleovou algebrou a Booleovým svazem. Toto tvrzení nám dává výhodu v tom, že jsme schopni přenášet vlastnosti a věty mezi těmito matematickými strukturami. Vyvrcholením teoretické části práce je bezpochyby důkaz věty o jednoznačnosti úplného disjunktního normálního tvaru Booleovy funkce.

V praktické části věnující se minimalizačním metodám jsme si na příkladech ukázali, že samostatná Quineova-McCluskeyova metoda není minimalizační metodou. Minimalizační se stává až po aplikaci metody mřížky prostých implikantů. Výsledky této dvojice metod se shodují s výsledky minimalizační metody minimalizace pomocí ekvivalence.

Program Mini-Malizace 1.0 je koncipován do jednoho okna z důvodu snadného porovnání výsledků výše zmíněných minimalizačních metod.

LITERATURA

[1] G.E. Hoernes a M.F. Heilweil, *Úvod do Booleovy algebry a navrhování logických obvodů*, SNTL, Praha, 1969, překlad z angličtiny.

[2] S.V. Jablonskij, *Úvod do diskrétnej matematiky*, Alfa, Bratislava, 1984.

[3] R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics*, New York, 1984.

[4] J. Kopka, *Svazy a Booleovy algebry*, Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem, 1991.

[5] F.P. Preparata a R.T. Yeh, *Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr*, Alfa, Bratislava, 1982.

[6] J. Šlapal, *Metody diskrétní matematiky*, skripta FSI VUT v Brně, 2004.

SEZNAM PŘÍLOH

1. CD s bakalářskou prací ve formátu pdf a programem Mini-Malizace 1.0.
2. CD s programem Mini-Malizace 1.0.